Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

[Gou]

Thm : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 tq $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.
Soit f sa somme sur $D(0,1)$. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
Si $\Delta_{\theta_0} = \{z\in\mathbb{C}, |z|<1\} \cap \{1-re^{i\theta}, r>0, \theta\in[-\theta_0,\theta_0]\}$, alors $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

- Soient $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, $R_N = S - S_N$.

Soit $z\in D(0,1)\setminus\{0\}$.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = \sum_{n=1}^{N}(R_{n-1}-R_n)(z^n-1) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1}-1) - \sum_{n=1}^{N} R_n(z^n-1) \quad \text{(ABEL)}.$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1}-z^n) - R_N(z^N-1) = (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N-1)$$

Donc lorsque $N\to+\infty$, $f(z)-S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$.

- Soit $\varepsilon>0$. Soit $N\in\mathbb{N}$, $\forall n>N$, $|R_n|<\varepsilon$.

$$|f(z)-S| \leq |z-1|\left|\sum_{n=0}^{N} R_n z^n\right| + |z-1|\varepsilon\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}|z|^n\right) \leq |z-1|\sum_{n=0}^{N}|R_n| + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

- Soit $z = 1-\rho e^{i\varphi}\in\Delta_{\theta_0}$.

$|z|^2 = (1-\rho e^{i\varphi})(1-\rho e^{-i\varphi}) = 1-2\rho\cos\varphi+\rho^2$. Pour $\rho\leq\cos\theta_0$:

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = (1+|z|)\frac{|z-1|}{1-|z|^2} \leq 2\frac{\rho}{2\rho\cos\varphi-\rho^2} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0-\cos\theta_0} = \frac{2}{\cos\theta_0}.$$

Soit $\alpha>0$, $\alpha\sum_{n=0}^{N}|R_n|<\varepsilon$. Dans ce cas : $|f(z)-S|\leq\varepsilon(1+2/\cos\theta_0)$.
dès que $|z-1|\leq\min\{\alpha,\cos\theta_0\}$

Thm : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1.
Soit f sa somme sur $D(0,1)$.
Si $\exists S\in\mathbb{C}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = S$ et $a_n = o(\frac{1}{n})$, alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

$S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$.

et $1-x^n = (1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) \leq (1-x)n$ si $x\in]0,1[$.

$$|S_N - f(x)| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} n|a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{n}{N}|a_n|x^n \leq (1-x)MN + \sup_{n>N}(n|a_n|)\frac{1}{N(1-x)}$$

où $M = \sup_{n\geq 0}(n|a_n|)$.

Soit $\varepsilon\in]0,1[$. $\forall N\in\mathbb{N}^*$, $|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})| \leq M\varepsilon + \sup_{n>N}(n|a_n|)\frac{1}{\varepsilon}$.

Si N_0 est tel que $\sup_{n>N_0}(n|a_n|)<\varepsilon^2$, alors : $\forall N\geq N_0$, $|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})| \leq M\varepsilon+\varepsilon$.

Or, par hypothèse, $f(1-\frac{\varepsilon}{N}) \xrightarrow[N\to+\infty]{} S$ donc $\exists N_1\in\mathbb{N}$, $\forall N\geq N_1$, $|f(1-\frac{\varepsilon}{N})-S|\leq\varepsilon$.

Donc par inégalité triangulaire, $\forall N\geq\max\{N_0,N_1\}$, $|S_N - S| \leq (M+2)\varepsilon$